

Chapitre 13 : Fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = \exp x$

Exemples :

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x - 5e^x$
 $f'(x) = 2 - 5e^x$

b) $g(x) = (x - 3)e^x$
 $g'(x) = 1e^x + (x - 3)e^x$
 $= e^x(x - 2)$

c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$
 $h'(x) = \frac{e^x \cdot 1 - e^x \cdot 1}{x^2}$
 $= \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$

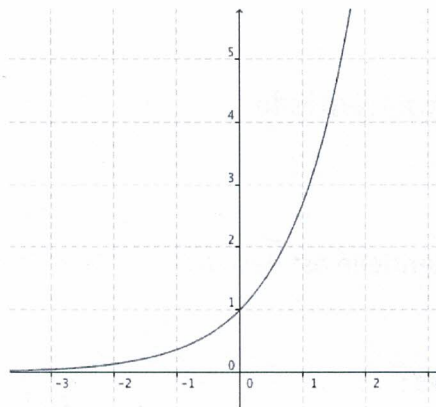
2) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} f: x &\mapsto e^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= e^x > 0 \\ \text{Donc } f &\text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Courbe représentative



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp x \exp y$

Corollaires : Pour tous réels x et y , on a :

a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp x \exp(-x) = 1$

b) $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \exp(-x) = \exp(x + (-x))$ d'après la propriété
 $= \exp(0)$
 $= 1$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x - y) = \exp(x + (-y))$
 $= \exp(x) \exp(-y)$ par la propriété
 $= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)}$ par la a)
 $= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

2) Le nombre e

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .

On a ainsi $\exp 1 = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e .

$$e \approx 2,718$$

Notation nouvelle :

$$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$$

On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

On a alors :

Propriétés : Pour tous réels x et y , on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = (e^2)^{-6} \times e^4$$
$$= e^{-12} \times e^4$$
$$= e^{-8}$$

$$B = \frac{1}{(e^{-4})^2} + \frac{(e^3)^{-1}}{e^2 \times e^{-5}}$$
$$= e^8 + 1$$

$$C = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$$
$$= \frac{e^{6x}}{e^{3x+1-x-1}}$$
$$= \frac{e^{6x}}{e^{2x}}$$
$$= e^{6x-2x}$$
$$= e^{4x}$$

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-2x+1} \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{x^2-3} &= e^{-2x} \\ \Leftrightarrow x^2-3 &= -2x \\ \Leftrightarrow x^2-2x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta &= 4+3 \times 1 \times 4 \\ &= 16 \\ x_1 &= 1 \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } e^{-2x+1} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow e^{-2x+1} &\geq e^0 \\ \Leftrightarrow -2x+1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2x &\geq -1 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{1}{2} \\ S &=]-\infty ; \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

IV. Exponentielle et suite géométrique

On a vu que pour tout entier n , et tout réel a , on a : $e^{na} = (e^a)^n$, ainsi :

Propriété : La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Rappel : Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemples :

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = 2e^{3n}$ b) $u_n = e^{2n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 5.

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2e^{3n}$
 $= 2(e^3)^n$

(u_n) est géométrique de premier terme 2 et de raison e^3

b) $u_n = e^{2n-1}$
 $= e^{-1} \times e^{2n}$
 $= e^{-1} (e^2)^n$
 $u_0 = e^{-1} \quad q = e^2$

2) Notons (v_n) cette suite

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$
 $= 5 \times e^{-n}$
 $= 5e^{-n}$

V. Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) Variations

Propriété :

La fonction $t \mapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto ke^{kt}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g(t) &= f(kt) \quad \text{avec } f: x \mapsto e^x \\ \Rightarrow g'(t) &= kf'(kt) \\ &= kf(kt) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f(t) &= e^{-2t} \text{ alors } f'(t) = -2f(-2t) \\ &= -2e^{-2t} \end{aligned}$$

Propriété :

Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

Démonstration :

$$\text{Soit } f: t \mapsto e^{kt}, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = ke^{kt}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{kt} > 0 \text{ donc } f'(t) \text{ a le signe de } k:$$

$$\text{si } k > 0 : f'(t) > 0 \text{ et } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{si } k < 0 : f'(t) < 0 \text{ et } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}$$

2) Représentation graphique

